



SFERINIO KEVALO SAUGOS RIBINIO BŪVIO ANALIZĖ

Tomas Ulitinas, Stanislovas Kalanta, Juozas Atkočiūnas

Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius, Lietuva

Įteikta 2012 12 10; priimta 2013 06 31

Santrauka. Darbe pateikiama simetriškai apkrauto lėkšto sferinio kevalo saugos ribinio būvio analizė. Konstrukcijos fizikiniai parametrai, forma, matmenys, apkrova ir jos pridėjimo vieta ir kryptis yra žinomi. Nagrinėjamas tamprusis ir idealiai tamprus plastinis kevalas, pasitelkiant ekstreminį energetinį principą randami tikrieji įtempių ir deformacijų būviai. Tamprus būvio analizės uždavinio matematinis modelis formuluojamas taikant virtualių jėgų principą, o ribinės apkrovos nustatymo uždavinio matematinis modelis formuluojamas kaip netiesinis matematinio programavimo uždavinys.

Reikšminiai žodžiai: lėkštasis sferinis kevalas, pusiausvirieji baigtiniai elementai, matematinis modelis, plastiškumo kriterijus, saugos ribinis būvis.

Nuoroda į šį straipsnį: Ulitinas, T.; Kalanta, S.; Atkočiūnas, J. 2013. Sferinio kevalo saugos ribinio būvio analizė, *Engineering Structures and Technologies* 5(2): 69–75. <http://dx.doi.org/10.3846/2029882X.2013.818192>

Įvadas

Darbe nagrinėjami tampriojo lėkšto simetriškai apkrauto sferinio kevalo įtempių ir deformacijų būvio analizės uždavinys ir ribinės apkrovos nustatymo uždavinys. Tampriojo kevalo analizės uždavinys formuluojamas taip: nustatyti įrašas ir poslinkius kevalo, veikiamo simetriškai pridėtų žinomo didumo apkrovų, kai kevalo geometriniai ir medžiagos fizikiniai parametrai (tampromo modulis, Puasono koeficientas) žinomi. Uždavinio matematinis modelis formuluojamas remiantis technine kevalų skaičiavimo teorija. Galioja plokščiųjų pjūvių ir sluoksnių nespūdumo vidurinio paviršiaus normalės kryptimis hipotezės. Nagrinėjamas tiesinis analizės uždavinys.

Kevalų skaičiavimas skaitiniais metodais susijęs su vientisos konstrukcijos pakeitimu jos diskretiniu modeliu su baigtiniu laisvumo laipsnių skaičiumi. Šiuo metu labiausiai paplitęs baigtinių elementų metodas. Skiriamos trys pagrindinės baigtinių elementų metodo modifikacijos: pusiausvirieji elementai, poslinkiniai elementai ir mišrūs elementai (Fraeijs de Veubeke 2001).

Kevalo diskretizacijai taikomas pusiausvirųjų baigtinių elementų metodas (Belytschko 1972; Gallagher 1972; Čyras, Kalanta 1974; Kalanta 1994), pagrįstas variaciniu Kastiljano principu. Jį taikant, galima atlikti tampriųjų ir tampriųjų plastinių konstrukcijų analizę. Jis yra tikslesnis už geometriškai darnių (poslinkinių) elementų metodą, bet matematinio požiūriu sudėtingesnis ir, matyt, todėl rečiau taikomas. Tačiau geresnis pusiausvirųjų elementų tikslumas sudaro galimybę naudoti retesnę baigtinių elementų tinklą ir taip sumažinti uždavinių apimtį, o tai ypač aktualu sprendžiant tampriųjų-plastinių konstrukcijų analizės ir optimizavimo uždavinius, kurie paprastai formuluojami kaip matematinio programavimo uždaviniai.

Kevalo ribinės apkrovos skaičiavimo uždavinys pateikiamas statine formuluote, kurioje nežinomaisiais yra statiniai dydžiai – apibendrintosios įrašos ir apkrovos parametras. Tačiau taikant dualumo teoriją galima nustatyti ir kinematinis dydžius. Taikomas idealiai tamprus plastiškojo izotropinio kūno fizinis modelis. Įrašų leistinumo sąlyga yra Hubero ir Mizeso plastiškumo kriterijus. Todėl gaunamas netie-

Corresponding address:

T. Ulitinas E-mail: tomas.ulitinas@vgtu.lt

Copyright © 2013 Vilnius Gediminas Technical University (VGTU) Press
<http://www.tandfonline.com/TESTN>



Taylor & Francis
Taylor & Francis Group

sinis iškilojo matematinio programavimo uždavinys, kurio diskretizacijai taikomas pusiausvirųjų baigtinių elementų metodas.

1. Sferinio kevalo lygčių diskretizavimas

Konstrukcija skaidoma į skaičiuojamuosius elementus, sudaromas skaičiuojamasis tinklas. Parenkant skaičiuojamąjį tinklą, būtina atsižvelgti ne tik į geometrinę konstrukcijos formą, bet ir į apkrovos paskirstymą. Tampriuosiuose plastiniuose kevaluose, kurių analizei taikomas ir pusiausvirųjų elementų metodas, ieškomos funkcijos gali turėti trūkių. Norint padidinti skaičiavimo rezultatų tikslumą, į juos reikia atsižvelgti. Tačiau tai galima padaryti tik elementų sujungimo paviršiuose, t. y. skaičiavimo tinklo linijose. Sudarant tokį konstrukcijos diskretinį modelį reikia laikytis šių taisyklių:

- a) skaičiuojamasis tinklas turi suskirstyti konstrukciją į sritis, kuriose fiziniai ir geometriniai parametrai, taip pat apkrovos intensyvumas yra nekintami;
- b) skaičiuojamojo tinklo linijos turi užkloti prognozuojamas plastiškosios suirties linijas ir apkrovos pasiskirstymo linijas, o koncentruotų jėgų pridėjimo vietas turi sutapti su šio tinklo susikirtimo taškais, t. y. pagrindiniais mazgais;
- c) išpjovų kraštai turi būti užkloti skaičiuojamojo tinklo linijomis;
- d) atskirai paremti, pavyzdžiui, kolonomis, konstrukcijos mazgai turi sutapti su pagrindiniais mazgais.

Sferiniai kevalai nagrinėjami polinėje koordinatų sistemoje (ρ, φ, z). Jos pradžia yra konstrukcijos centre. Užtenka ištirti tik vieną tokio kevalo spindulį, nes veikiant simetrinei apkrovai įrašos ir poslinkiai nepriklauso nuo koordinatės φ . Žiedinio kevalo elementai sujungiami kraštiniais mazgais pagrindiniuose diskretinio modelio mazguose. Diskretizacijai naudojamas S. Kalantos sukurtas antrosios eilės žiedinis elementas (Kalanta 1994) su trimis mazginiais taškais, išdėstytais viename spindulyje (1 pav.).

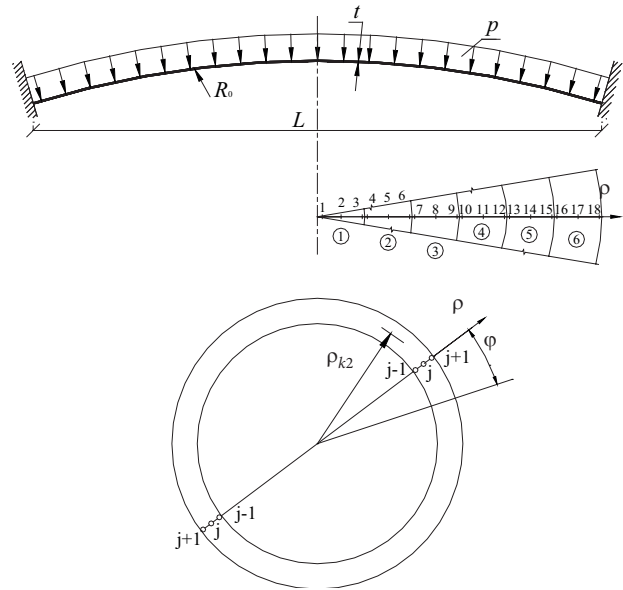
Veikiant simetrinei apkrovai, kevalo įtempių būvis aprašomas įrašų vektorine funkcija

$$\mathbf{S}(\rho) \equiv [M_\rho(\rho) M_\varphi(\rho) N_\rho(\rho) N_\varphi(\rho)]^T,$$

o išorinė paskirstyta apkrova vektoriumi

$$\mathbf{p}(\rho) \equiv [p_\rho(\rho) p_n(\rho)]^T.$$

Vektorinė funkcija $\mathbf{S}(\rho)$ ir $\mathbf{p}(\rho)$ siejami diferen-



1 pav. Sferinio kevalo diskretizacija žiediniais elementais su trimis mazgais

Fig. 1. Discretization of the flat spherical shell by circular elements with three nodal points

cialinėmis statikos lygtimis:

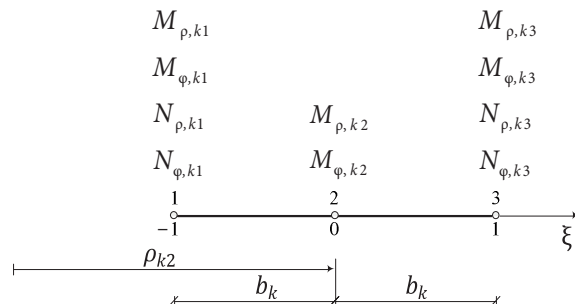
$$-\frac{N_\rho(\rho)}{\rho} - \frac{dN_\rho(\rho)}{d\rho} + \frac{N_\varphi(\rho)}{\rho} = p_\rho(\rho), \tag{1}$$

$$-\frac{d^2 M_\rho(\rho)}{d\rho^2} - \frac{2dM_\rho(\rho)}{\rho d\rho} + \frac{dM_\varphi(\rho)}{\rho d\rho} - \frac{N_\rho(\rho)}{R_0} - \frac{N_\varphi(\rho)}{R_0} = p_n(\rho).$$

Žiedinis elementas nagrinėjamas lokaliųjų koordinatų φ ir ξ sistemoje. Jo mazginės įrašos parodytos 2 pav. Ryšys tarp globalinės koordinatės ρ_k ir lokalinės koordinatės ξ_k nusakomas priklausomybėmis

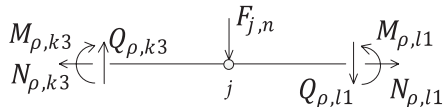
$$\xi_k = \frac{\rho_k - \rho_{k2}}{b_k}; \rho_k = \rho_{k2} + \xi_k b_k,$$

čia ρ_{k2} – antro mazgo koordinatė globalioje koordinatų sistemoje (ρ, φ, z); $2b_k$ – baigtinio elemento plotis. Lenkimo momentai elemente aprašomi antrojo laipsnio, o ašinės jėgos – pirmojo laipsnio daugianariais:



2 pav. Kevalo elemento mazgų įrašos

Fig 2. The nodal internal forces of a shell element



3 pav. Kevalo pagrindinį mazgą veikiančios jėgos
Fig 3. Forces acting on the main node of the shell

$$\begin{aligned} M_{\rho k}(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\rho k1} + (1 - \xi_k^2)M_{\rho k2} + \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\rho k3}, \\ M_{\varphi k}(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\varphi k1} + (1 - \xi_k^2)M_{\varphi k2} + \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\varphi k3}, \\ N_{\rho k}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_k)N_{\rho k1} + \frac{1}{2}(1 + \xi_k)N_{\rho k3}, \\ N_{\varphi k}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_k)N_{\varphi k1} + \frac{1}{2}(1 + \xi_k)N_{\varphi k3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Taigi elemento įtempių būvis aprašomas mazginių įrašų vektoriumi:

$$\mathbf{S}_k = \left(M_{\rho k1}, M_{\varphi k1}, N_{\rho k1}, N_{\varphi k1}, M_{\rho k2}, M_{\varphi k2}, M_{\rho k3}, M_{\varphi k3}, N_{\rho k3}, N_{\varphi k3} \right)^T.$$

Įrašų interpoliavimo funkcijos (2) netenkina kevalo diferencialinių pusiausvyros lygčių (1), todėl kiekvienam elementui $k=1,2,\dots,r$ būtina sudaryti elemento vidinės pusiausvyros lygtis. Taigi nagrinėjamo kevalo diskretinio modelio pusiausvyros lygtis sudaro ne tik pagrindinių mazgų, kuriuose sujungti elementai, pusiausvyros lygtys, bet ir elementų vidinės pusiausvyros lygtys.

Funkcijas (2) įrašant į lygtis (1) ir diferencijuojant gaunamos algebrinės elemento pusiausvyros lygtys

$$\left[A_k(\xi_k) \right] \mathbf{S}_k = \mathbf{p}_k. \quad (3)$$

Šių lygčių algebrinius operatorius $\left[A_k(\xi_k) \right]$ pateiktas Kalantos (1994) darbe. Kadangi operatorius $\left[A_k(\xi_k) \right]$ priklauso nuo koordinatės ξ_k , tai elemento statikos lygtys išreiškiamos jo kraštinių mazgų pusiausvyros lygtimis

$$\left[A_{ek} \right] \mathbf{S}_k = \mathbf{F}_k, \quad (4)$$

kurios sudaromos taikant Bubnovo ir Galiorkino kolo-kacijų metodą. Čia:

$$\begin{aligned} \left[A_{ek} \right] &= 2\pi b_k \int_{-1}^1 \left[G_k(\xi_k) \right] \left[A_k(\xi_k) \right] \mathbf{S}_k (\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k, \\ \mathbf{F}_k &= 2\pi b_k \int_{-1}^1 \left[G_k(\xi_k) \right] \mathbf{p}_k (\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k = \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi b_k}{3} \begin{bmatrix} 3\rho_{k2} - b_k & & \\ & 3\rho_{k2} - b_k & \\ 3\rho_{k2} + b_k & & \\ & & 3\rho_{k2} + b_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{\rho,k} \\ p_{n,k} \end{bmatrix} = \left[\eta_k \right] \mathbf{p}_k,$$

kur įtakinių funkcijų matrica

$$\left[G_k(\xi_k) \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi_k) & & \\ & \frac{1}{2}(1 - \xi_k) & \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_k) & & \\ & & \frac{1}{2}(1 + \xi_k) \end{bmatrix}.$$

Elemento pusiausvyros lygčių (4) matrica $\left[A_{ek} \right]$ pateikta Kalantos (1994) darbe.

Diskretinio modelio mazgo j , kuriame sujungti elementai k ir l (3 pav.), statikos lygtys susideda iš lenkimo momentų, ašinių ir skersinių jėgų pusiausvyros lygčių:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho_{k3} \left(-M_{\rho,k3} + M_{\rho,l1} \right) &= 0, \\ 2\pi\rho_{k3} \left(-N_{\rho,k3} - N_{\rho,l1} \right) &= 0, \\ 2\pi\rho_{k3} \left(Q_{\rho,k3} - Q_{\rho,l1} \right) &= 2\pi\rho_{k3} F_{n,j}, \end{aligned} \quad (5)$$

čia $F_{n,j}$ – žiede ρ_j paskirstytos normalinės apkrovos intensyvumas. Skersinių jėgų statikos lygtys sudaromos naudojant priklausomybę

$$Q_{\rho,k}(\xi_k) = \frac{1}{\rho_k} \left[M_{\rho,k}(\xi_k) - M_{\varphi,k}(\xi_k) \right] + \frac{dM_{\rho,k}(\xi_k)}{d\xi_k} \frac{d\xi_k(\rho_k)}{d\rho_k}.$$

Sudarius lygtis (4) visiems elementams ir lygtis (5) visiems pagrindiniams mazgams, gaunama kevalo diskretinio modelio algebrinių pusiausvyros lygčių sistema

$$\left[A \right] \mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (6)$$

čia $\mathbf{S} = \left[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k, \dots, \mathbf{S}_r \right]^T$ – diskretinio modelio įrašų vektorius, kurį sudaro visų elementų mazginės įrašos.

Diskretinio modelio geometrinės lygtys sudaromos taikant virtualių jėgų principą. Atsižvelgiant į fizines lygtis, tampriosios konstrukcijos poslinkių \mathbf{u} ir deformacijų $\Theta = \left[D \right] \mathbf{S}$ darna aprašoma tokia lygtimi

$$\left[D \right] \mathbf{S} - \left[A \right]^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

čia $\left[D \right]$ – kvazidiagonalioji pasidavimo matrica, kurios diagonaliaisiais blokais yra baigtinių elementų pasidavimo matricos

$$\left[D_k \right] = 2\pi b_k \int_{-1}^1 \left[H_k(\xi_k) \right]^T \left[d_k \right] \left[H_k(\xi_k) \right] (\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k,$$

čia $\left[H_k(\xi_k) \right]$ – k -tojo elemento įrašų interpoliavimo matrica, sudaryta iš įrašų formos funkcijų. Ji sieja elemento įrašų funkciją $\mathbf{S}_k[\xi]$ su mazginių įrašų vektoriumi $\mathbf{S}_k(\xi) = \left[H_k(\xi) \right] \mathbf{S}_k$; $\left[d_k \right]$ –

kevalo be galo mažo elemento pasidavumo matrica. Ji yra tokia:

$$[d_k] = \frac{1}{E_k t_k} \begin{bmatrix} \frac{12}{t_k^2} & -\frac{12\nu_k}{t_k^2} & & \\ -\frac{12\nu_k}{t_k^2} & \frac{12}{t_k^2} & & \\ & & 1 & -\nu_k \\ & & -\nu_k & 1 \end{bmatrix},$$

čia E_k, ν_k – elemento k medžiagos tamprumo modulis ir Puasono koeficientas; t_k – elemento storis.

Tampriojo plastinio kevalo geometrinės lygtys:

$$[D] \mathbf{S} + \Theta_p - [A]^T \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

čia Θ_p – plastinių deformacijų vektorius.

Kiekvieno konstrukcijos diskretinio modelio skaičiuojamojo pjūvio i įrašų leistinumo sąlyga grindžiama netiesine Hubero ir Mizeso takumo sąlyga (Atkočiūnas et al. 2009; Atkočiūnas 2011). Ji užrašoma taip:

$$\frac{16}{t^2} (M_{\rho i}^2 - M_{\rho i} M_{\phi i} + M_{\phi i}^2) + N_{\rho i}^2 - N_{\rho i} N_{\phi i} - N_{\phi i}^2 \leq N_{0i}^2$$

arba matricine forma

$$f_i = N_{0i}^2 - \mathbf{S}_i^T [\Phi_i] \mathbf{S}_i \geq 0, \quad (8)$$

visiems $i = 1, 2, \dots, s$;

čia N_{0i} – skaičiuojamojo pjūvio i ribinė įraša, t. y. membraninė ribinė ašinė jėga. Simetrinė matrica

$$[\Phi_i] \equiv \begin{bmatrix} 16/t^2 & -8/t^2 & 0 & 0 \\ -8/t^2 & 16/t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

yra teigiamai apibrėžta, todėl sąlygos (8) yra iškilos žemyn. Hubero ir Mizeso sąlyga yra homogeninė, todėl ją galima taikyti ne tik analizės ir ribinės pusiausvyros uždaviniams, bet ir konstrukcijos parametrų optimizavimo uždaviniams.

Tarus, kad idealiai tampriai plastinei sistemai galioja holonominis dėsnis, plastinės deformacijos Θ_{pi} skaičiuojamos pagal priklausomybę

$$\Theta_{pi} = 2\lambda_i [\Phi_i] \mathbf{S}_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s. \quad (9)$$

čia λ_i – proporcingumo daugiklis. Įrašų vektorių \mathbf{S}_i išreiškus tampriųjų \mathbf{S}_{ei} ir liekamųjų \mathbf{S}_{ri} įrašų suma ($\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri}$), konstrukcijos stiprumo sąlygos gali būti aprašomos visuma nelygybių:

$$f_i \equiv N_{0i}^2 - (\mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri})^T [\Phi_i] (\mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri}) \geq 0,$$

sudaromų visiems baigtinių elementų mazgams $i = 1, 2, \dots, s$.

2. Matematiniai uždavinių modeliai

Tampriojo sferinio kevalo poslinkių ir įrašų analizės uždavinio matematinio modelis

$$[A] \mathbf{S}_e = \mathbf{F}, \quad (10)$$

$$[D] \mathbf{S}_e - [A]^T \mathbf{u}_e = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Matematiname modelyje statikos lygčių skaičius lygus m , o geometrinių lygčių skaičius – n . Jame nežinomieji yra n -matis įrašų vektorius \mathbf{S}_e ir m -matis poslinkių vektorius \mathbf{u}_e . Todėl lygčių sistema (10)–(11) vienareikšmiškai nustato konstrukcijos įtemptąjį ir deformuotąjį būvį. Pagrindinių lygčių pusiausviraisiais baigtiniais elementais sistema tampa jungiamąja grandimi ir tampriai plastiniams kevalams skaičiuoti (Kalanta 1996; Venskus et al. 2010; Pham 2003; Atkočiūnas 2011).

Tampriosios įrašos ir poslinkiai gaunami iš lygčių sistemos (10)–(11). Pradžioje eliminuojant įrašas

$$\mathbf{S}_e = [D]^{-1} [A]^T \mathbf{u}_e,$$

pusiausvyros lygtis (10) išreiškiama nežinomaisiais poslinkiais

$$[A][D]^{-1}[A]^T \mathbf{u}_e = \mathbf{F} \text{ arba } [K] \mathbf{u}_e = \mathbf{F}. \quad (12)$$

Matrica $[K] = [A][D]^{-1}[A]^T$ vadinama diskretinio modelio standumo matrica. Sprendžiant lygčių sistemą (12) nustatomi poslinkiai

$$\mathbf{u}_e = [K]^{-1} \mathbf{F}. \quad (13)$$

Tada įrašos skaičiuojamos pagal šią formulę:

$$\mathbf{S}_e = [D]^{-1} [A]^T \left([A][D]^{-1}[A]^T \right)^{-1} \mathbf{F} = [\alpha] \mathbf{F}, \quad (14)$$

čia $[\alpha] = [D]^{-1} [A]^T \left([A][D]^{-1}[A]^T \right)^{-1}$ – įrašų infliuentinė matrica.

Konstrukcijos ribinės apkrovos parametro F skaičiavimo uždavinyje išorinių jėgų vektoriaus \mathbf{F} apkrovos aprašomos priklausomybe $\mathbf{F} = \boldsymbol{\eta} F$. Tuomet kevalo ribinės apkrovos parametro F nustatymo uždavinio matematinis modelis:

$$F \rightarrow \max, \quad (15)$$

kai

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i^T [\Phi_i] \mathbf{S}_i &\leq N_{0i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, s; \\ [A] \mathbf{S} - \boldsymbol{\eta} F &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Jis atitinka žinomą A. Gvozdevo teoremą. Jeigu tampriosios įrašos S_e žinomos, galima naudoti kitą ribinės pusiausvyros uždavinio modifikaciją:

$$F \rightarrow \max, \quad (17)$$

kai

$$(\mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri})^T [\Phi_i] (\mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri}) \leq N_{0i}^2, \quad i=1,2,\dots,s;$$

$$[A] \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (18)$$

$$\mathbf{S}_e = [\alpha] \eta F.$$

Šiuose matematiniuose modeliuose ieškomieji dydžiai yra įrašų vektoriai $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_{ri}$ ir ribinės apkrovos parametras F , o visi kiti dydžiai yra žinomi. Kadangi stiprumo sąlygos yra netiesinės ir iškiliosios, tai matematiniai modeliai (15)–(16) ir (17)–(18) yra netiesiniai išskilojo matematinio programavimo uždaviniai.

3. Skaičiavimo rezultatai

1 uždavinys. Nagrinėjamas standžiai įtvirtintas kevalas, veikiamas normalinės simetriškai paskirstytos apkrovos intensyvumo $p=1\text{ kN/m}^2$; jo kreivumo spindulys $R_0=1\text{ m}$ (4 pav.); medžiaga izotropinė.

Pirmiausia patikrinama, ar skaičiuojamasis kevalas yra lėkštas. Sferinio kevalo geometriniai parametrai susieti su lygtimi

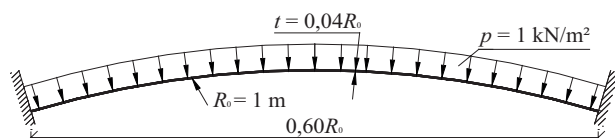
$$4f^2 - 8R_0f + L^2 = 0.$$

Iš čia nustatomas pakylės aukštis

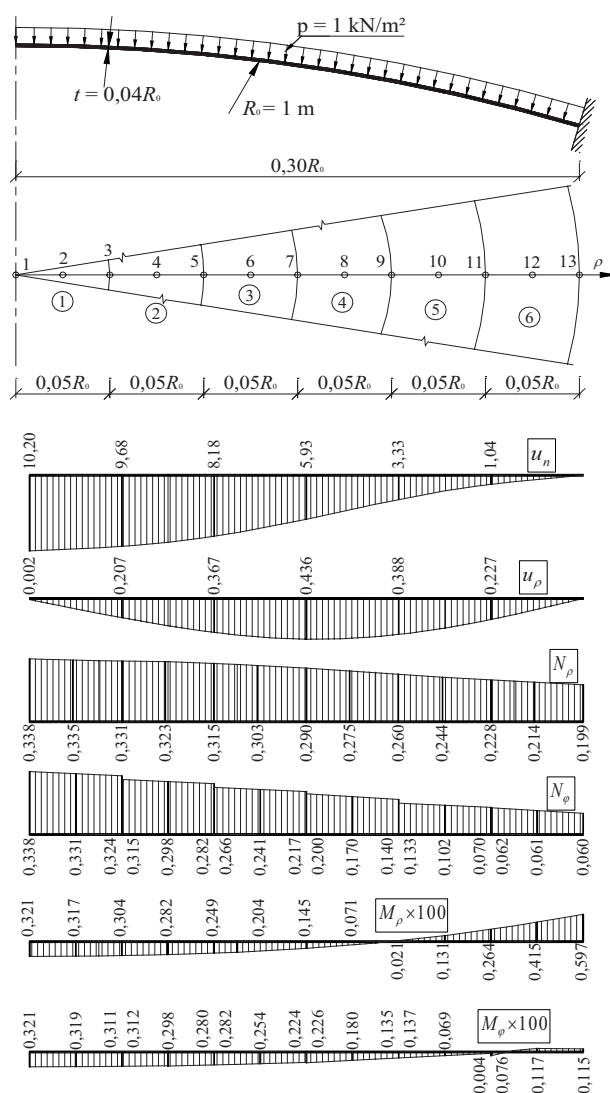
$$f_{1,2} = \left(8R_0 \pm \sqrt{64R_0^2 - 16L^2} \right) / 8 \approx 0,0461R_0.$$

Santykis $f/L=0,0768 < 1/5$ rodo, kad kevalas yra lėkštas.

Tampriosios įrašos \mathbf{S}_e ir poslinkiai \mathbf{u}_e apskaičiuojami pagal (10)–(11) matematinę modelį. Dėl ašinės simetrijos ir kevalo lėkštumo nagrinėjama tik jo segmento projekcija (5 pav.), kur šeši baigtiniai elementai sudaro sferinio kevalo matematinę modelį. 5 pav. parodytos pagrindinių mazgų poslinkių ir įrašų



4 pav. Tampriojo sferinio kevalo skaičiuojamoji schema
Fig. 4. A computational scheme of an elastic spherical shell



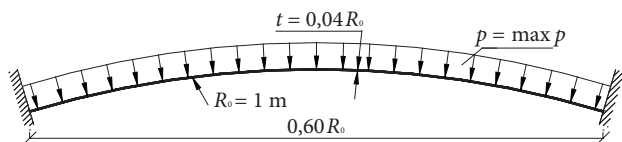
5 pav. Kevalo poslinkių ir įrašų reikšmės
(iki daugiklių pR_0/E ir pR_0)

Fig. 5. Displacement and internal forces of shell
(up to the factors pR_0/E and pR_0)

reikšmės. Poslinkių reikšmės iki daugiklio pR_0/E , o įrašų reikšmės – iki daugiklio pR_0 . Elementų sujungimo mazguose įrašų M_ϕ ir N_ϕ funkcijos turi nedidelių trūkių, todėl šių funkcijų reikšmės pagrindiniuose mazguose galima aproksimuoti jų aritmetiniu vidurkiu. Matyti, kad lenkimo momentai M_ϕ ir M_ρ yra labai nedideli, palyginti su ašinėmis jėgomis N_ϕ ir N_ρ .

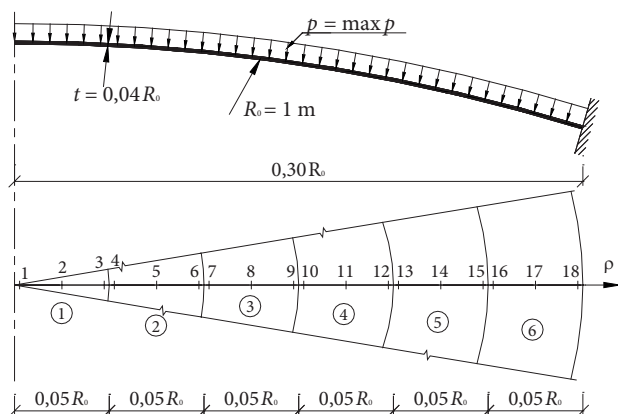
Skaičiuojant tokį pat kevalą ir suskaidant į devynis žiedinius baigtinius elementus, įrašų reikšmės sutampa. Tai leidžia daryti išvadą, kad pats elementas ir elementų skaičiavimo rezultatai yra gana tikslūs. Sukurtas elementas efektyviai gali būti panaudotas ir tampriesiems plastiniams kevalams analizuoti bei optimizuoti (Kalanta 1995).

2 uždavinys. Nagrinėjamas standžiai įtvirtintas kevalas, veikiamas normalinės simetriškai paskirstytos apkrovos intensyvumo $p = \text{const}$. Kevalo kreivumo spindulys $R_0 = 1\text{ m}$ (6 pav.), ribinė ašinė jėga $N_0 = \text{const}$. Reikia nustatyti ribinės apkrovos intensyvumą p ir jį atitinkančias įrąžų reikšmes.



6 pav. Tampriojo plastinio sferinio kevalo skaičiuojamoji schema

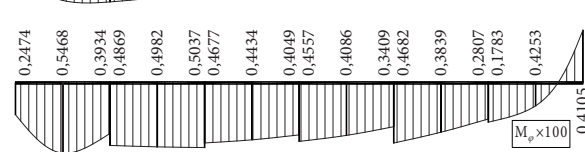
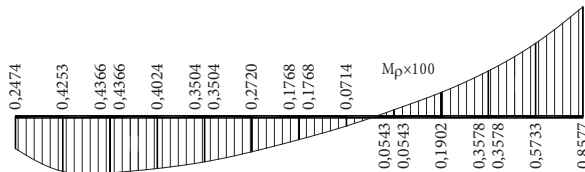
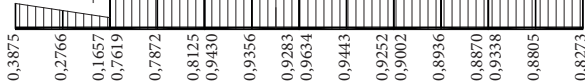
Fig. 6. A computational scheme of an elastic-plastic spherical shell



N_p



N_ϕ



7 pav. Kevalo įrąžų diagramos plastiškai įrant (iki daugiklių N_0/R_0 ir N_0)

Fig. 7. Displacement and internal forces of shell (up to the factors pR_0/E and pR_0)

Ribinės apkrovos parametro p skaičiavimo uždavinys sprendžiamas pagal (15)–(16) matematinį modelį. Naudojamas diskretinis modelis su šešiais elementais (6 pav.). Stiprumo sąlygos tikrinamos visuose elementų mazguose. Taigi bendras skaičiuojamųjų pjūvių skaičius $s = 18$. Išsprendus netiesinio programavimo uždavinį nustatyta, kad ribinės apkrovos intensyvumas $p = 2,568 N_0/R_0$. Kevalo plastinį irimą atitinkančios įrąžų diagramos pavaizduotos 7 pav. Lenkimo momentų M_p ir M_ϕ reikšmės pateiktos iki daugiklio N_0/R_0 , o ašinių jėgų N_ϕ ir N_p – iki daugiklio N_0 . Matyti, kad lenkimo momentai M_ϕ ir M_p yra labai nedideli, palyginti su ašinėmis jėgomis N_ϕ ir N_p .

Takumo sąlygos lygybėmis tampa skaičiuojamuosiuose pjūviuose 2, 3, 5–10, 12, 13 ir 15–18. Tačiau tik trylika iš jų galima priskirti aktyviems apribojimams, nes plastinio tekėjimo deformacijos pasireiškia tik pjūvių 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15–18 aplinkoje. Įrąžų pasiskirstymo pobūdis standžioje kevalo srityje gali būti ne vienintelis, todėl jų priskyrimas tikrosioms yra sąlyginis.

Parametras $p = 2,568 N_0/R_0$ apskaičiuotas kevalo šešių baigtinių elementų diskretiniam modeliui. Toks diskretizacijos laipsnis pusiausviriesiems baigtiniams elementams visiškai pakankamas, nes imant devynis baigtinius elementus, gaunama ta pati parametro reikšmė $p = 2,568 N_0/R_0$.

Išvados

1. Darbe aprašytas žiedinis pusiausvirasis baigtinis elementas veiksmingai gali būti naudojamas tiek tampriesiems, tiek tampriesiems plastiniams sferiniams kevalams analizuoti, ribiniam būviui nustatyti bei optimizavimo uždaviniams formuluoti ir jų skaitiniams sprendiniams nustatyti.
2. Naudojant pusiausvuruosius baigtinius elementus, rezultatų tikslumas yra geresnis, palyginti su poslinkiniais (geometriškai darniais) elementais. Tai leidžia sumažinti uždavinio apimtį mažinant baigtinių elementų skaičių, o tai labai svarbu sprendžiant netiesinio programavimo uždavinius.

Literatūra

- Atkočiūnas, J. 2011. *Optimal shakedown design of elastic-plastic structures*. Vilnius: Technika. 300 p.
- Atkočiūnas, J.; Čižas, A. E. 2009. *Netamprių konstrukcijų mechanika* [Mechanics of inelastic structures]. Vilnius: Technika. 268 p. <http://dx.doi.org/10.3846/1077-8>

- Belytschko, T. 1972. Plane stress shakedown analysis by finite elements, *International Journal of Mechanics Sciences* 14: 619–625. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90061-6](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7403(72)90061-6)
- Čyras, A.; Kalanta, S. 1974. Optimal design of cylindrical shells by the finite element technique, *Mechanics Research Communication* 1(3): 125–130. [http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413\(74\)90002-0](http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413(74)90002-0)
- Fraeijs de Veubeke, B. M. 2001. Displacement and equilibrium models in the finite element method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 52: 287–342.
- Gallagher, R. H. 1975. *Finite element analysis: fundamentals*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc. 420 p.
- Kalanta, S. 1994. Tampriosios plokštės ir kevalai [Elastic plates and shells], iš R. Karkauskas, A. Krutinis, J. Atkočiūnas, S. Kalanta, J. Nagevičius. *Statybinės mechanikos uždavinių sprendimas kompiuteriais* [Computer-aided solution of structural mechanics problem]. Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 163–218.
- Kalanta, S. 1995. Ravnovesnye konechnye elementy v raschetakh uprugikh konstruktsij [Tamprųjų konstrukcijų skaičiavimas pusiausviraiais baigtiniais elementais], *Statyba* 1(1): 25–47.
- Kalanta, S. 1996. Ravnovesnye konechno-elementnye postanovki zadach rascheta i optimizatsii predelnoj nagruzki [Ribinės apkrovos analizės ir optimizacijos uždavinių formuluotės, panaudojant pusiausvirausius baigtinius elementus], *Statyba* 3(7): 6–22.
- Pham, D. C. 2003. Plastic collapse of a circular plate under cycling load, *International Journal of Plasticity* 19: 547–559. [http://dx.doi.org/10.1016/S0749-6419\(01\)00078-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00078-X)
- Venskuskas, A.; Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Ulitinas, T. 2010. Integrated load optimization of elastic-plastic axisymmetric plates at shakedown, *Journal of Civil Engineering and Management: International Research and Achievements* 16(2): 203–208.

ANALYSIS OF ULTIMATE LIMIT STATE OF SPHERICAL SHELL

T. Ulitinas, S. Kalanta, J. Atkočiūnas

Abstract. The article presents ultimate limit state analysis and limit load problem of a symmetrically loaded flat spherical shell. Physical parameters (modulus of elasticity, Poisson's ratio), shape, dimensions of the construction, load and its adding position and orientation are known. The mathematical model of the problem is formulated by technically computing the shells theory. The bending moments and axial forces are described by the second and the first degree polynomials. The element's differential statics equations, describing the balance between the internal and external forces, are replaced with algebraic equilibrium equations presented by the Bubnov-Galerkin method. The mathematical model and the calculation algorithm of the internal forces and displacements in the shell analysis problem are developed and formulated using statics and geometry equations. The construction is divided into countable elements, which are composed into a computational network. It is necessary to take into account not only the geometric shape of the structure, but also the distribution of load when the computational network of spherical shell is composed. The spherical shells are considered in the cylindrical (ρ, φ, z) coordinate system. The beginning of the coordinate system is the construction center. The internal forces and the displacements are independent of j coordinates, when the load is symmetrical, so it is enough to investigate only one radial of the shell. The circular shell elements are connected by boundary nodes in the main nodes of the discrete model. The second-order circular element with three nodal (calculation) points in the one radial is used for discretization (Fig. 1). The mathematical model of elastic-plastic problem is a nonlinear mathematical programming problem.

Elastic internal forces \mathbf{S}_e and displacements \mathbf{u}_e are calculated by mathematical model (10)–(11). The values of internal forces and displacement of the main nodes are shown in Fig. 5. The values of nodal displacements are given up to the factor pR_0/E , while the values of the internal forces are given up to the factor pR_0 . The problem of limit load parameter p is calculated by mathematical model (15)–(16). The strength conditions are tested at all elements nodes. The value of limit load is $p = 2,568 N_0/R_0$. The Internal forces diagrams are shown Fig. 7. They are a corresponded plastic decomposition of flat spherical shell.

Keywords: spherical shell, equilibrium finite element, a mathematical model of plasticity criteria, safety cut-off state.

Tomas ULITINAS. A PhD student at the Department of Structural Mechanics of Vilnius Gediminas Technical University. Research interests: shakedown theory of elastic-plastic structures, the structural optimization and the methods of mathematical programming in structural mechanics.

Stanislovas KALANTA. Dr, Associate Professor at the Department of Structural Mechanics of Vilnius Gediminas Technical University. Research interests: finite element method, the analysis and optimization of elastic and elastic-plastic structures.

Juozas ATKOČIŪNAS. Dr Habil, Associate Professor, the head of the Department of Structural Mechanics of Vilnius Gediminas Technical University. Research interests: computational mechanics, shakedown theory of elastic-plastic structures, the structural optimization and the methods of mathematical programming in structural mechanics.