ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

Г. ПУРЮШКИС

Institute of Mathematics and Informatics,
2600 Vilnius, Akademijos St. 4, Lithuania

Предположим, что Ω – ограниченная область в R^n с границей $\Gamma_{n-1}\cup\Gamma_{n-2}$, где Γ_{n-1} и Γ_{n-2} есть $(n-1)$ –мерное и $(n-2)$ –мерное соответственно гладкие многообразия, Γ_{n-1} и Γ_{n-2} не пересекаются, $n>2$, $P(x,D)$ – линейный дифференциальный оператор в Ω с гладкими коэффициентами на $\Omega\cup\Gamma_{n-2}$, $\deg P(x,D)=m$, $m\geq 2$. Рассматривается следующая граничная задача

$$P(x,D)u(x)=0,\ \ x\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x)=0,\ \ x\in\Gamma_{n-2}\setminus A, \tag{2}$$

где A – замкнутое множество, лежащее строго внутри Γ_{n-2}. Здесь рассматривается особенность решения на множестве A, т.е. когда $u(x)=0$ на Γ_{n-2}, если $u(x)$ – решение задачи (1), (2).

Особенности решения в Ω рассматривались в работе [1] для решения из $L^p_{loc}(\Omega)$, $C(\omega)$, $L_{ip\delta}(\Omega)$. Ю. В. Егоров рассматривал особенности на границе Ω, когда граница состоит из $(n-1)$ –мерного многообразия [2], [3]. Граничные задачи с границей меньших измерений рассмотрел С. Л. Соболев [4] для Δ^m, где Δ – оператор Лапласа, а для эллиптических операторов обобщения сделал И. Ю. Стернин [5].

Здесь на тип оператора P не делается никаких ограничений. Без ограничения общности предполагаем, что $\Gamma_{n-2}\in\{x_1=x_2=0\}$.

Делаем замену переменных $x_1=r\cos\phi$, $x_2=r\sin\phi$, $x'=(x_3,\dots,x_n)$. Основное предположение состоит в том, что справедлива формула Грина

$$\int_\Omega Puvrdrd\phi dx' - \int_\Omega uP'(vr)drd\phi dx' = \sum_{j=0}^{m-1} B_j u S_j(vr)dx' \tag{3}$$

для решения u задачи (1), (2) и гладких функций v, равных нулю вне некоторой достаточно малой окрестности Γ_{n-2}. Здесь P' сопряженный оператор к P, $P'r^m|_{r=0}\neq 0$, $S_0 r^{m-1}|_{r=0}\neq 0$ для всех x', B_0 – тождественный оператор, $\deg B_j=j$, S_0 имеет $(m-1)$–ю производную по r. Пусть S_j удовлетворяют условиям

$$S_j=\sum_{k+|\alpha|\leq m-j-1} c_\alpha \frac{D^\alpha}{r^k},\ \ c_\alpha\in C^\infty(\Omega\cup\Gamma_{n-2}),\ \deg S_j=m-j-1.$$

Теорема. *Предположим, что справедлива формула Грина* (3), P', B_j, S_j *удовлетворяют вышеуказанным условиям. Тогда задача* (1), (2) *имеет решение* u, $u=0$ *на* Γ_{n-2}, *если выполнено одно из следующих условий:*

1) $u\in W^l_p$, $l\leq 0$, $l\in Z$, $H_{n-(2-l)q}(A)<\infty$, $2<p<\infty$,

2) $u\in W^l_\infty$, $l\leq 0$, $l\in Z$, $H_{n-2+l}(A)=0$,

3) $u \in C^l(\Omega \cup \Gamma_{n-2})$, $l \le 0$, $H_{n-2+l}(A)=0$.

4) *Множество* A *состоит из одной точки* $A=\{0\}$, $u(x)=o(\eta^{2-n})$, $\eta \to 0$, $\eta=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Здесь $H_d(A)$ *является* d *−мерной мерой Хаусдорфа множества* A,

$$H_d(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf \sum s_j^d,$$

инфимум берется по n *−мерным кубам* Q_j *с длиной ребра* $s_j<\varepsilon$; $p+q=pq$.

Множество $W_p^l(\Omega)$, $l \le 0$, $l \in Z$ *состоит из функций вида*

$$\sum_{|\alpha|\le -l} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L_p(\Omega).$$

Функции из $C^0(\Omega \cup \Gamma_{n-2})$ *есть непрерывные функции, а при* $l<0$, $C^l(\Omega \cup \Gamma_{n-2})$ *состоит из функций вида*

$$\sum_{|\alpha|\le -l} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in C^{l-[l]}(\Omega \cup \Gamma_{n-2}),$$

т.е. при $l \notin Z$

$$|f_\alpha(x)-f_\alpha(y)| \le const|x-y|^{l-[l]}, \quad x,y \in \Omega \cup \Gamma_{n-2}.$$

Доказательство. В качестве функции v возьмем

$$\psi\left(\sum_{\alpha_1+l=m-1} c_\alpha \frac{D^{\alpha_1} r^{m-1}}{r^l}\right)^{-1} r^{m-2}.$$

Эта функция удовлетворяет условиям

$$S_0(vr)|_{r=0}=\psi, \quad S_j(vr)|_{r=0}=0, \quad j>0.$$

Пусть Q'_j −концентрический куб с длиной ребра $s_j/2$. Пусть также

$$A \Subset \cup Q'_j, \quad h_\varepsilon=\sum h_j, \; h_\varepsilon=1 \text{ в } \cup Q'_j, \quad h_j \in C_0^\infty(Q_j), \quad |D^\alpha h_j| \le c_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}, \text{ если } x \in Q_j.$$

Для любого $\psi \in C_0^\infty(\Gamma_{n-2})$ и решения u (1), (2) имеем

$$\int_{\Gamma_{n-2}} u\psi dx' = \sum_{i=0}^{m-1} B_i u S_i(vh_\varepsilon r)dx' = -\int_\Omega uP'(h_\varepsilon vr)drd\phi dx'. \tag{4}$$

Пусть χ_ε− характеристическая функция ε окрестности множества A. При $\varepsilon \to 0$ последний интеграл не превосходит

$$\|\chi_\varepsilon u\|_{L_p(\Omega)}^{1/p}\left(H_{n-2q}(A)+o(\varepsilon)\right)^{1/q}.$$

Отсюда получаем, что интеграл (4) равен нулю для любого $\psi \in C_0^\infty$, поскольку $\|\chi_\varepsilon u\|_{L_p(\Omega)}^{1/p} \to 0$, если $p<\infty$ и $H_{n-2q}(A)=0$, если $p=\infty$. Теорема доказана для $l=0$.

Если $u \in W_p^l(\Omega)$, $l<0$, то

$$\int_\Omega uP'(h_\varepsilon vr)drd\phi dx' = \sum \int_\Omega f_\alpha\left(-D^\alpha\right)P'(h_\varepsilon vr)drd\phi dx'.$$

Если $u \in C^l(\Omega \cup \Gamma_{n-2})$, $l<0$, то

$$\int\limits_{\Omega} uP'(h_\varepsilon vr)dr d\varphi dx' = \sum_j \left(\int\limits_{Q_j} \left(f_\alpha(x) - f_\alpha\left(x^j\right)\right) P'(h_\varepsilon vr) dr d\varphi dx' \right) + O(\varepsilon).$$

Здесь x_j — фиксированные точки из Q_j.

Если имеет место 4-й пункт теоремы, то последний интеграл в (4) ведет себя как $o(1)$, поскольку

$$\int\limits_{\Omega} uD^\alpha(h_\varepsilon vr) dr d\varphi dx' = o\left(\varepsilon^{2-n}\right)\varepsilon^{m-1-|\alpha|}\varepsilon^{n-1} = o\left(\varepsilon^{m-|\alpha|}\right).$$

Теорема доказана.

Литература

1. R. Harvey, J. Polking. Removable singularities of partial differetial equations //Acta. Math7, 1970, 125, 39–56.

2. Ю. В. Егоров. Об устранимых особенностях в граничных условиях для дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун–та, Сер. 1, Математика, Механика, 1985, Н. 6, 30–36.

3. Ю. И. Егоров. О гладкости граничных значений// Применение новых методов анализа в теории краевых задач. Изд–во Воронежского ун–та, 1990, с. 11–18.

4. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград, 1950.

5. В. Ю. Стернин. Общие краевые задачи для эллиптических уравнений в области, границей которой служат многообразия различной размерности //Вестн. Моск. ун–та, Сер. 1, Математика, Механика, 1965 N 2.